

Liczby zespolone

1. Ciekawostki historyczne

Początki liczb zespolonych sięgają już XVI wieku. W czasach dzisiejszych nie można przecenić ich znaczenia i wkładu w rozwój nauki. Co ciekawsze jako pierwszy zaczął je używać Rafael Bombelli, który nie był matematykiem. Był on inżynierem kierującym pracami przy osuszaniu bagien i terenów błotnych w Toskanii. Co więcej, wielu sławnych matematyków nie chciało pogodzić się z ich istnieniem i zaprzeczało ich istnieniu.

Obecnie liczby zespolone są codziennym narzędziem nie tylko matematyka czy fizyka, ale i inżyniera, któremu oddają ogromne korzyści w elektronice, aerodynamice itd..

Pojawienie się liczb zespolonych wiąże się ściśle z problemem rozwiązania równania kwadratowego o wyróżniku (delcie) ujemnym. W szczególności problem sprowadza się do obliczenia pierwiastka kwadratowego z liczby ujemnej.

Jeżeli ograniczymy się do liczb rzeczywistych, to jak wiadomo obliczanie pierwiastka z liczby ujemnej jest niewykonalne. Nie kłopotując się tym zbytnio Bombelli założył jego istnienie i nazywał go liczbą urojoną (wymagowaną), a poprzednio znane liczby liczbami rzeczywistymi.

Zwolennicy istnienia tych liczb wykonywali na nich działania tak, jak na liczbach rzeczywistych dodając, odejmując, mnożąc i dzieląc. Oznaczali pierwiastek z liczby -1 literą i przyjmując, że $i^2 = -1$. Swobodnie dodając i mnożąc liczby rzeczywiste i urojone tworzyli nowe liczby postaci $a+bi$, które dziś nazywamy liczbami zespolonymi.

Początek XIX wieku zdarł wszelką mistykę z tych liczb, gdyż przyniósł ich ściśle określenie. Pierwsze z nich – Gaussa - wykazało, że liczby zespolone są to właściwie punkty płaszczyzny euklidesowej, w której wprowadzono pewne działania zwane dodawaniem i mnożeniem punktów czyli liczb zespolonych. Drugie ujęcie - Hamiltona - wprowadza liczby zespolone jako pary liczb rzeczywistych, ze specyficznym (specjalnym) sposobem ich dodawania i mnożenia.

2. Definicja liczby zespolonej, interpretacja geometryczna.

Liczbą zespoloną nazywamy parę uporządkowaną liczb rzeczywistych (a,b) . Często taką parę zapisuje się w postaci sumy

$$z = a + bi, \text{ gdzie } i^2 = -1.$$

Tą postać liczby zespolonej nazywamy **postacią kanoniczną**. Liczbę a nazywamy **częścią rzeczywistą**, zaś liczbę b **częścią urojoną** liczby zespolonej z . Część rzeczywista oznaczamy **Re** z , a część urojoną symbolem **Im** z , mamy więc:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= a \\ \operatorname{Im} z &= b. \end{aligned}$$

Liczba zespolona jest **równa zero** wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Re} z = 0$ i $\operatorname{Im} z = 0$.

Dwie **liczby zespolone są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy są równe odpowiednio ich części rzeczywiste i urojone.

Liczbę zespoloną postaci $a - bi$ nazywamy **liczbą sprzężoną** do liczby $z = a + bi$ i oznaczamy ją z reguły symbolem \bar{z} . Liczbie tej odpowiada na płaszczyźnie punkt, który jest położony symetrycznie do punktu (a, b) względem osi Ox .

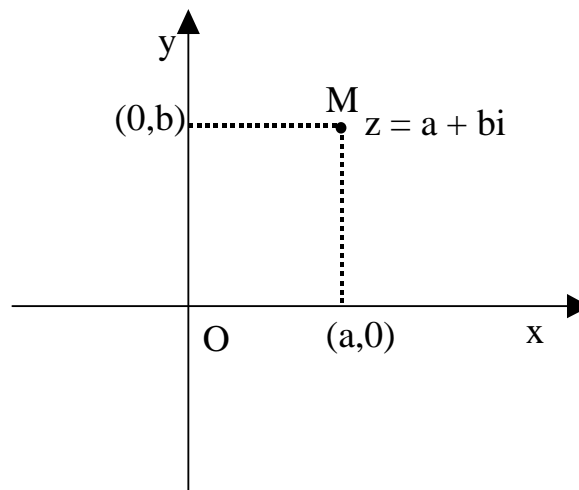
Liczby zespolone postaci $a + 0i$ zapisujemy jako a i utożsamiamy z **liczbami rzeczywistymi**.

Liczbowi rzeczywistym $a = a + 0i$ odpowiadają punkty na płaszczyźnie o rzędnej równej zero, tzn. punkty osi odciętych (osi Ox). Dlatego oś odciętych nazywamy **osią rzeczywistą**.

Jeżeli część rzeczywista liczby zespolonej jest równa zero, to liczba ma postać bi i nazywamy ją **liczbą urojoną**. Liczbowi urojonym $bi = 0 + bi$ odpowiadają punkty o odciętej równej zero, tzn. punkty osi rzędnych (osi Oy). Dlatego oś rzędnych nazywamy **osią urojoną**.

Płaszczyznę, której punktom przyporządkowano w powyższy sposób liczby zespolone, nazywamy **płaszczyzną Gaussa**.

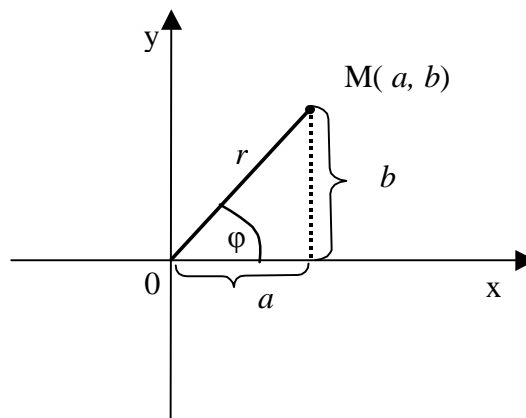
Liczbie zespolonej $z = a + bi$ odpowiada punkt płaszczyzny o współrzędnych (a, b) .



Także o wektorze \vec{OM} łączącym początek układu współrzędnych z punktem $M(a, b)$ odpowiadającym liczbie zespolonej $z = a + bi$ mówimy, że przedstawia geometrycznie liczbę zespoloną z .

3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej.

Zamiast określać liczbę zespoloną $z = a + bi$ różną od zera poprzez podanie jej części rzeczywistej i urojonej możemy ją określić inaczej - współrzędnymi biegunowymi - podając odległość r punktu $M(a, b)$ od początku układu współrzędnych oraz kąt φ jaki tworzy wektor \vec{OM} z dodatnim kierunkiem osi Ox .



Wówczas zachodzą związki

$$a = r \cos \varphi \quad b = r \sin \varphi$$

stąd

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

oraz dla $r \neq 0$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Liczbę r , która jest długością wektora \vec{OM} jest modułem liczby zespolonej $z = a + bi$, co zapisujemy

$$r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Widać stąd, że liczba zespolona jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy moduł jej jest równy zeru.

Kąt φ nazywamy **argumentem liczby zespolonej** z , co zapisujemy

$$\varphi = \arg z$$

Dla liczby zespolonej o module równym zero, argument nie jest określony.

Argument określamy z dokładnością do wielokrotności składnika 2π , gdyż obrót o kąt 2π stanowi obrót o kąt pełny. Wartość argumentu φ spełniająca warunek

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

nazywamy **wartością główną argumentu**, lub po prostu **argumentem głównym**.

Na podstawie związków określających moduł i argument liczby zespolonej (wymienionych wyżej) liczbę zespoloną można wyrazić poprzez jej moduł i argument w postaci

$$z = a + bi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Postać tę nazywamy **postacią (przedstawieniem) trygonometryczną** liczby zespolonej.

Przykład.1.

Przedstawmy w postaci trygonometrycznej liczbę $z = -2+2i$.

W tym celu obliczmy moduł i argument danej liczby

$$|z| = |-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8},$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{-2}{\sqrt{8}} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \varphi = \frac{3}{4}\pi.$$

Zatem liczba $z = -2+2i$ zapisana w postaci trygonometrycznej, to

$$z = \sqrt{8} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$$

Postać trygonometryczna ułatwia w szczególności mnożenie i dzielenie liczb zespolonych.

Jeżeli liczby zespolone z_1 i z_2 dane są w postaci trygonometrycznej

$$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

to

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Widać więc, że aby pomnożyć (podzielić) dwie liczby zespolone wystarczy pomnożyć (podzielić) ich moduły i dodać ich argumenty (odjąć od argumentu licznika argument mianownika).

Zadania.

Przedstaw w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone

1. 7,
2. $-4i$,
3. $3-3i$,
4. $1 + i\sqrt{3}$,
5. $-2\sqrt{3} - 2i$.

4. Postać wykładnicza liczby zespolonej.

Oprócz wymienionych wcześniej postaci kanonicznej oraz trygonometrycznej istnieją także inne przedstawienia liczb zespolonych. W szczególności liczby zespolone można zapisać w tzw. **postaci wykładniczej**.

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi},$$

przy czym symbole $|z|$, φ oznaczają odpowiednio moduł i argument główny danej liczby zespolonej.

Dla liczb zespolonych zapisanych w tej postaci łatwo można więc podać moduł i argument. Postać ta w bardzo dobry sposób obrazuje mnożenie dzielenie liczb zespolonych. Od razu widać, że w wyniku mnożenia otrzymamy liczbę, której moduł będzie równy iloczynowi modułów tych liczb, a argument równy sumie argumentów.

5. Działania na liczbach zespolonych.

Na liczbach zespolonych możemy wykonywać podobnie jak na liczbach rzeczywistych podstawowe działania. Przyjmijmy oznaczenia: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$.

Liczby zespolone dodajemy, odejmujemy i mnożymy tak, jak wyrażenia algebraiczne pamiętając, że $i^2 = -1$. Tak więc:

$$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d) i,$$

$$z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d) i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc) i.$$

a) Dodawanie liczb zespolonych

Liczby zespolone można dodawać, jeżeli są przedstawione w postaci algebraicznej.

$$z_1 + z_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

Należy dodać do siebie części rzeczywiste oraz części urojone.

Przykład

$$z_1 = 5 + j8$$

$$z_2 = -12 + j6$$

$$z_1 + z_2 = 5 + j8 + (-12 + j6) = -7 + j14$$

b) Odejmowanie liczb zespolonych

Odejmowanie liczb zespolonych można wykonać jedynie na liczbach przedstawionych w postaci algebraicznej

$$z_1 - z_2 = a_1 + jb_1 - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

Należy odjąć części rzeczywiste liczb zespolonych oraz ich części urojone.

Przykład

$$z_1 = 15 - j4$$

$$z_2 = 20 + j12$$

$$z_1 - z_2 = 15 - j4 - (20 + j12) = 15 - j4 - 20 - j12 = -5 - j16$$

c) Mnożenie liczb zespolonych

Mnożenie liczb zespolonych jest możliwe zarówno na liczbach w postaci algebraicznej jak i na liczbach zespolonych przedstawionych w postaci wykładniczej.

-- postać algebraiczna

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = a_1a_2 + ja_1b_2 + jb_1a_2 + j^2b_1b_2$$

Wiedząc, że $j^2 = -1$ (przypominam, że $j = \sqrt{-1}$) otrzymujemy:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + b_1a_2)$$

Przykład

$$z_1 = 2 + j3$$

$$z_2 = 4 - j8$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + j3) \cdot (4 - j8) = 8 - j16 + j12 + 24 = 32 - j4$$

-- postać wykładnicza

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Przykład

$$z_1 = 10e^{j60^\circ}$$

$$z_2 = 5e^{j45^\circ}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 10e^{j60^\circ} \cdot 5e^{j45^\circ} = 50e^{j105^\circ}$$

W wyniku pomnożenia dwóch liczb zespolonych sprzężonych otrzymujemy liczbę rzeczywistą.

$$z^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 - jab + jba + b^2 = a^2 + b^2$$

d) Dzielenie liczb zespolonych

Dzielenie liczb zespolonych podobnie jak ich mnożenie może być wykonane na liczbach przedstawionych w postaci algebraicznej jak i wykładniczej.

-- postać algebraiczna

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2}$$

Aby pozbyć się liczby zespolonej z mianownika musimy pomnożyć licznik i mianownik przez liczbę sprzężoną z mianownikiem.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{a_1a_2 - ja_1b_2 + jb_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Przykład

$$\frac{5 + j10}{3 - j4} = \frac{(5 + j10)(3 + j4)}{(3 - j4)(3 + j4)} = \frac{15 + j20 + j30 - 40}{3^2 + 4^2} = \frac{35 + j50}{25} = 1,4 + j2$$

-- postać wykładnicza

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Przykład

$$\frac{100e^{j60^\circ}}{25e^{j110^\circ}} = \frac{100}{25} e^{j(60^\circ - 110^\circ)} = 4e^{-j50^\circ}$$

e) Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$$z = \sqrt[n]{a + jb}$$

Należy liczbę zespoloną pod pierwiastkiem zamienić w postać wykładniczą.

$$z = \sqrt[n]{re^{j\varphi}}$$

Teraz liczymy pierwiastek z modułu liczby zespolonej a jej argument dzielimy przez stopień pierwiastka.

$$z = \sqrt[n]{r} e^{j\frac{\varphi}{n}}$$

Przykład

$$z = \sqrt{30 + j40} = \sqrt{50e^{j53,13^\circ}} = \sqrt{50} e^{j\frac{53,13^\circ}{2}} = 7,07e^{j26,57^\circ}$$

f) Logarytmowanie liczb zespolonych

$$z = \ln(a + jb)$$

Logarytm z liczby zespolonej możemy wyliczyć, jeśli liczba zespolona będzie przedstawiona w postaci wykładniczej.

$$z = \ln(a + jb) = \ln(re^{j\varphi})$$

Możemy teraz logarytm z iloczynu zastąpić sumą logarytmów.

$$z = \ln(re^{j\varphi}) = \ln r + \ln e^{j\varphi}$$

czyli

$$z = \ln r + j\varphi$$

Przykład

$$z = 50 + j80$$

$$\ln z = \ln(50 + j80) = \ln(94,4e^{j58^\circ}) = \ln 94,4 + \ln e^{j58^\circ} = 4,54 + j58^\circ$$

Pierwiastkowanie i logarytmowanie liczb zespolonych to działania, które są spotykane przy obliczaniu czwórników i filtrów elektrycznych.

Modułem liczby $z = a + bi$ nazywamy liczbę

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dzielenie liczb zespolonych jest trochę trudniejsze. Łatwo można wykazać, że

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Obliczając iloraz $\frac{z_1}{z_2}$ (zakładając oczywiście, że $z_2 \neq 0$) mnożymy licznik i mianownik tego ułamka przez sprzężenie mianownika (liczby z_2). Otrzymujemy wtedy następujący wzór

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd)}{|z_2|} + \frac{(bc - ad)}{|z_2|}i$$

Działania arytmetyczne na liczbach zespolonych są rozszerzeniem działań na liczbach rzeczywistych, tzn. w przypadku liczb rzeczywistych jest obojętne czy np. mnożymy je jako liczby rzeczywiste czy zespolone z częścią urojoną równą zero. Z podanych definicji działań na liczbach zespolonych wynika, że działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych są łączne i przemienne oraz mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. Zachowane są również znane własności odejmowania i dzielenia. Powyższe stwierdzenia powodują, że dla liczb zespolonych prawdziwe są wzory skróconego mnożenia, wzór dwumianowy Newtona, twierdzenie Bezout itd.. Nie określamy natomiast nierówności liczb zespolonych innych niż rzeczywiste.

Przykład.1.

Znajdź część rzeczywistą i urojoną liczby $(5+2i)+(-3-i)$.

Aby znaleźć część rzeczywistą i urojoną należy dodać podane liczby zespolone. Otrzymujemy wówczas

$$(5+2i) + (-3-i) = (5-3) + (2-1)i = 2+i$$

Zatem część rzeczywista równa jest 2, a urojona 1.

Przykład.2.

Wykonaj działania $(-1+7i) \cdot (4+10i)$.

Działania należy oczywiście wykonać w odpowiedniej kolejności (najpierw mnożenie, potem dodawanie i odejmowanie) pamiętając, że $i^2=-1$.

$$(-1+7i) \cdot (4+10i) = -1 \cdot 4 + (-1) \cdot 10i + 7i \cdot 4 + 7i \cdot 10i = -4 -10i + 28i - 70 = -74+18i$$

Przykład.3.

Jaka liczba zespolona powstanie w wyniku podzielenia liczby $2i$ przez liczbę $1+i$.

W wyniku dzielenia otrzymujemy oczywiście ułamek $\frac{2i}{1+i}$.

Wystarczy teraz pomnożyć licznik i mianownik tego ułamka przez liczbę sprzężoną do liczby $1+i$ (z mianownika), czyli przez $1-i$, a następnie uprościć otrzymane wyrażenie.

$$\frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i - 2i^2}{1-i^2} = \frac{2i+2}{2} = 1+i$$

Przy dzieleniu liczby $2i$ przez liczbę $1+i$ otrzymujemy zatem liczbę $1+i$.

Zadania.

Wykonaj działania

1. $(2-i)(3+2i)-5i$,
2. $(5-(6+4i))-(3+2i)(3-2i)$,
3. $(1+2i)^2$,
4. $(2-i)^3$,
5. $\frac{3-i}{1+2i}$,
6. $\frac{5+3i}{5-3i}$.

5. Podnoszenie do potęgi i wyciąganie pierwiastka z liczby zespolonej.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej jest szczególnie przydatna przy podnoszeniu do potęgi i obliczaniu pierwiastka z tej liczby. Gdy weźmiemy wzór na mnożenie liczb zespolonych w tej postaci dla $z_1 = z_2$ i rozszerzymy na dowolną ilość liczb zespolonych, to otrzymamy wzór na n-tą (n – liczba naturalna) potęgę liczby zespolonej zwany **wzorem Moivre'a**

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Dzięki temu wzorowi w bardzo prosty sposób możemy podnosić liczby zespolone do potęgi i to dowolnie dużej.

Przykład.1.

Obliczmy $(1+i)^{12}$.

Łatwo się przekonać że liczba $1+i$ ma następujące przedstawienie trygonometryczne

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Zatem stosując wzór de Moivre'a na potęgowanie liczb zespolonych otrzymujemy

$$(1+i)^{12} = 64 (-1 + 0i) = -64.$$

Pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w , która podniesiona do n-tej potęgi daje liczbę z , to znaczy $w^n = z$.

Spróbujmy znaleźć sposób na obliczanie pierwiastka n-tego stopnia z liczby zespolonej z .

Założmy, że liczba zespolona z zapisana jest w postaci trygonometrycznej

$$z = r (\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Chcemy znaleźć taką liczbę zespoloną w w postaci trygonometrycznej

$$w = R (\cos\beta + i \sin\beta),$$

aby

$$w^n = z.$$

Wyliczając w^n ze wzoru de Moivre'a, a następnie porównując moduły i argumenty po obu stronach równości $w^n=z$, dostajemy

$$R^n = r$$

oraz

$$n\beta = \varphi + 2k\pi.$$

Dodanie składnika $2k\pi$ wynika z niejednoznaczności argumentu (może się on różnić o wielokrotność 2π). Zatem

$$R = \sqrt[n]{r}, \quad \beta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Wynika stąd, że pierwiastek n -tego stopnia z liczby zespolonej z istnieje, ale nie jest wyznaczony jednoznacznie. Wszystkie pierwiastki dostaniemy biorąc $k = 0, 1, 2, \dots$.

Wśród argumentów

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

istnieje dokładnie n takich, których różnice nie są wielokrotnościami liczby 2π . Są to np. liczby $k = 0, 1, \dots, n-1$. Zatem istnieje zawsze dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z różnej od zera. Dane są one wzorami

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad \text{gdzie } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Przykład.2.

Rozwiążmy równanie $z^3=1$.

Rozwiązanie równania $z^3=1$ sprowadza się do znalezienia wszystkich pierwiastków sześciennych z 1 (istnieją oczywiście dokładnie trzy różne).

Ponieważ moduł liczby 1 jest równy 1, a argument 0, to korzystając ze wzoru na pierwiastki n -tego stopnia z liczby zespolonej mamy

$$w_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$w_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$w_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Jeżeli się przyglądnijemy wartościom pierwiastków liczby zespolonej, to zauważymy, że ich moduły są takie same i argumenty różnią się o wielokrotność $\frac{2\pi}{n}$. Z tej obserwacji wnioskujemy, że pierwiastki leżą na jednym okręgu o środku w punkcie 0 i promieniu równym pierwiastkowi n-tego stopnia z modułu oraz, że pierwiastki dzielą okrąg na n równych części. Jest to bardzo użyteczny wniosek przy zaznaczaniu pierwiastków na płaszczyźnie Gaussa, ponieważ wystarczy narysować okrąg o promieniu $\sqrt[n]{|z|}$, policzyć i zaznaczyć jeden pierwiastek danej liczby oraz podzielić okrąg na n równych części tak, aby policzony pierwiastek był jednym z punktów podziału. W ten sposób otrzymujemy wszystkie pierwiastki liczby z .

Zadania.

Oblicz

1. $(-1 + i)^5$,

2. $(5 - 5i\sqrt{3})^6$,

3. $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{2003}$,

4. $\sqrt[3]{i}$,

5. $\sqrt[6]{-1}$,

6. $\sqrt[3]{-2 + 2i}$.